24η Άσκηση

2021-2022

Γενική στις παραγώγους

Δίνεται η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- $f^{(3)}(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $f''(0)=f'(0)=0$.
- Έχει ρίζα η εξίσωση $f(x)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να τη μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β) Να ορίσετε την συνάρτηση $S=\dfrac{f}{g}$ με $g(x)=1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης S δεν τέμνει τον άξονα x΄x να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\ln\left(x^2\right)\right)+\ln x=f\left[(x-1)(x+1)\right]$ στο $(0,1]$.

ε) Αν η f είναι περιττή τότε να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) $f^{(3)}(x)>0 \Rightarrow f''\nearrow\mathbb{R}$ άρα για $x<0 \overset{f''\nearrow}{\Rightarrow} f''(x)<f''(0)=0 \Rightarrow f'\searrow(-\infty,0]$ και για $x>0 \overset{f''\nearrow}{\Rightarrow} f''(x)>f''(0)=0 \Rightarrow f'\nearrow[0,+\infty)$.

Επίσης για $x<0 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f\nearrow(-\infty,0]$, $x>0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο x = 0 είναι $f\nearrow\mathbb{R}$.

Επειδή για $x<0 \Leftrightarrow f''(x)<0$ και για $x>0 \Leftrightarrow f''(x)>0$ και η f είναι συνεχής στο $x=0$ τότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$. Η f παρουσιάζει καμπή στο μηδέν, δηλαδή έχει σημείο καμπής το (0,f(0)).

β) Για το πεδίο ορισμού της $S=\dfrac{f}{g}$ πρέπει: : $\begin{cases} x\in D_f \\ 1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ 1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x\neq 0\end{cases}$

Ισχύει $|\eta\mu x|\leq|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$. Άρα έχουμε:
$|\eta\mu x|\leq|x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x\leq x^2 \Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu^2 x\leq x^2 \Leftrightarrow 1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x\leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα έχουμε ότι $D_S=\mathbb{R}^*$ αφού $1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$.

Είναι $S(x)=\dfrac{f(x)}{1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x}$ για κάθε $x\neq 0$.

γ) Η f ως γνησίως αύξουσα συνάρτηση θα έχει το πολύ μια ρίζα, όμως για κάθε $x\neq 0$ είναι $f(x)\neq 0$, γιατί για να μην τέμνει η γραφική παράσταση της S τον x΄x άξονα πρέπει :
$S(x)\neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x}\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$.
Επομένως αφού η f έχει ακριβώς μία ρίζα και είναι διάφορη του μηδενός άρα η ρίζα είναι το μηδέν δηλαδή $f(0)=0$.

δ) $f\left(\ln\left(x^2\right)\right)+\ln x=f\left[(x-1)(x+1)\right] \Leftrightarrow f\left(\ln\left(x^2\right)\right)+\ln x=f\left(x^2-1\right)$ (1)

Ισχύει για κάθε $x>0$ ότι $\ln x\leq x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$.
Για x το x^2 έχουμε: $\ln\left(x^2\right)\leq x^2-1$ για κάθε $x\neq 0$ αφού $x^2>0$ για κάθε $x\neq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Για $x\in(0,1)$ έχουμε ότι: $\ln\left(x^2\right)<x^2-1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\ln\left(x^2\right)\right)<f\left(x^2-1\right)$ (2)

Επίσης για $x\in(0,1)$ ισχύει ότι $\ln x<0$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2),(3) προκύπτει ότι: $f\left(\ln\left(x^2\right)\right)+\ln x<f\left(x^2-1\right)$ για κάθε $x\in(0,1)$

Για $x=1$ ισχύει ότι $\ln\left(x^2\right)=x^2-1 \Rightarrow f\left(\ln\left(x^2\right)\right)=f\left(x^2-1\right)$ και $\ln 1=0$. Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1]$ την $x=1$.

ε) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στην f στο διάστημα $[\kappa,x]$ με x>κ >0 και έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\kappa,x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(\kappa)}{x-\kappa} \Leftrightarrow f(x)=f'(\xi)x-\kappa f'(\xi)+f(\kappa)$$

Ισχύει $0<\kappa<\xi<x \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} <0<f'(\kappa)<f'(\xi)$

$$f(x)=f'(\xi)x-\kappa f'(\xi)+f(\kappa)>f'(\kappa)x-\kappa f'(\kappa)+f(\kappa)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(\kappa)x-\kappa f'(\kappa)+f(\kappa)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(\kappa)x\right)\overset{f'(\kappa)>0}{=}+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-f(-x)\right)\underset{u\to+\infty}{\overset{-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-f(u)\right)=-\infty$.

Από γνωστό θεώρημα ισχύει ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ γιατί η f είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\mathbb{R}$.